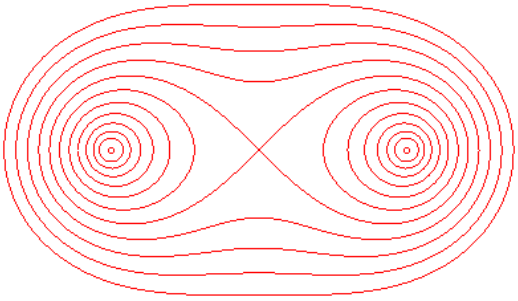
Ovales de Cassini



En 1667, Louis XIV décide la construction d'un observatoire à Paris ; il appelle **Giovanni Domenico Cassini** pour en être le directeur. Cassini est un astronome réputé ; en bon géomètre, il connaît les courbes décrites par un point M dont la somme ou la différence, ou encore le rapport des distances MA et MB à deux points A et B donnés est constant :

MA + MB constant : M est sur une ellipse ;
MA – MB constant : M est sur une hyperbole ;
MA / MB constant : M est sur un cercle.

Mais en 1680, il pense que la trajectoire apparente du soleil autour de la terre est une courbe sur laquelle c'est le produit MA × MB qui reste constant ; une nouvelle courbe est née : l'**ovale de Cassini**.

Avec l'origine au milieu de [AB] et en posant AB = 2a, les points A et B ont pour coordonnées (– a, 0) et (a, 0).
Si on pose la constante MA × MB égale à un nombre positif donné k^2, on obtient :

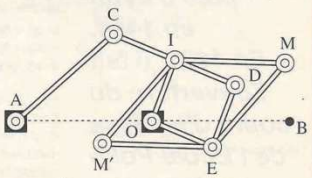
$$MA \times MB = k^2 \quad \Leftrightarrow \quad MA^2 \times MB^2 = k^4$$
$$\Leftrightarrow \quad [(x-a)^2 + y^2] \times [(x+a)^2 + y^2] = k^4.$$

Ce qui se ramène à $P(x, y) = 0$ où P est un polynôme du quatrième degré. On dit que la courbe est une **quadrique** : une droite la coupera au plus en quatre points, car le calcul des points d'intersection amène une équation du quatrième de gré.

En coordonnées polaires, on obtient $r^4 - 2a^2 r^2 \cos 2\theta + a^4 = k^4$, ce qui permet un tracé à la calculatrice graphique par :

$$r = \sqrt{a^2 \cos 2\theta \pm \sqrt{k^4 - a^4 \sin^2 2\theta}}.$$

Pour les bricoleurs et autres fanatiques de Meccano, voici une façon complètement mécanique de tracer un ovale avec 9 barres articulées autour de 8 pivots comme ceci
A et O sont fixes. (On a indiqué la position de B pour mémoire.)
AC = CD = AO = 1/2AB. I est le milieu de [CD]. IDEO et IMEM′ sont des losanges. Quand tout cela se met en branle, M et M′ décrivent un ovale de Cassini : c'est là qu'il faut mettre le crayon. La longueur des côtés du losange IMEM′ détermine la constante k^2.



La courbe telle que MA × MB = k^2 où A, B et k^2 sont donnés peut avoir plusieurs formes. Si la distance AB vaut 2a :

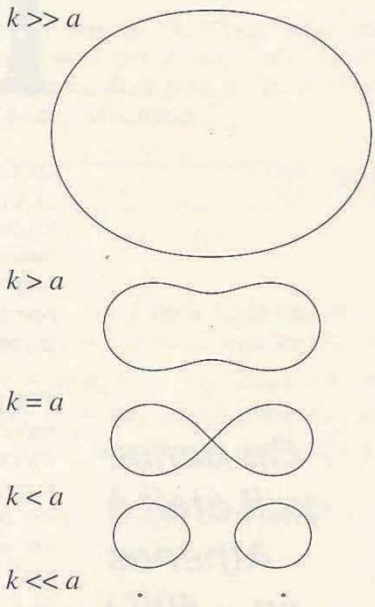
Pour $k >> a$: (k très supérieur à a). Cela reviennt à dire que les points A et B sont très rapprochés : MA = MB et MA × MB = k^2 revient à peu près à MA = k : l'ovale est proche d'un cercle.

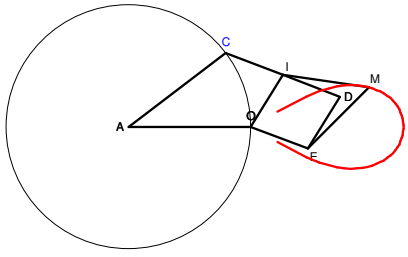
Pour $k > a$: l'ovale s'allonge et se creuse.

Pour $k = a$: l'ovale passe par le milieu de [AB]. Jacques Bernoulli a étudié en 1694 cette courbe particulière qui s'appelle une "**lemniscate de Bernoulli**".

Pour $k < a$: les inégalités triangulaires empêchent la courbe de s'approcher de l'origine : elle se scinde en deux.

Pour $k << a$: l'ovale se réduit a deux "larmes" autour de A et B.





On a : AC = CD = AO et I milieu de CD ; IOED = losange et IM=EM

D'après J. LUBCZANSKI revue « Tangente » N°25 - 1992